

UN ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS MÉTODOS MIMÉTICOS, DIFERENCIAS FINITAS Y ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS ESTACIONARIOS

Abdul Lugo^{a,b,1} and Giovanni Calderón^b

^a*Universidad Politécnica Territorial del Oeste de Sucre “Clodosbaldo Russian”, Cumaná 6101, Venezuela*

^b*Grupo Ciencias de la Computación, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, La Hechicera, Mérida 5101, Venezuela*

Resumen. Los métodos numéricos: miméticos, diferencias finitas y elementos finitos, son analizados desde un punto de vista numérico. Se busca concluir sobre la eficiencia, orden de convergencia y costo computacional de estos métodos. El análisis es hecho en problemas de valor de frontera unidimensionales (ecuación convección-difusión en régimen estacionario) con variaciones distintas en el gradiente, coeficiente difusivo y velocidad convectiva.

Palabras clave: Métodos miméticos, Método de los elementos finitos, Método de diferencias finitas, Métodos conservativos, Convergencia.

Abstract. Numerical methods: mimetic finite differences and finite elements, are analyzed from a numerical point of view. It seeks to conclude on the efficiency, order of convergence and computational cost of these methods. The analysis is done in boundary value problems one-dimensional (convection-diffusion equation at steady) with different variations in the gradient, diffusion coefficient and convective velocity.

Keywords: Mimetics methods, Finite Element methods, Finite differences methods, Conservative methods, Convergence.

1 INTRODUCCIÓN

Los métodos numéricos comúnmente usados para definir aproximaciones numéricas a la solución de los diversos problemas de la ingeniería y las ciencias, que se modelan a partir de ecuaciones diferenciales parciales son: el método de diferencias finitas (DF) y el método de los elementos finitos (MEF). No obstante, en las últimas dos décadas, un nuevo tipo de esquemas conservativos en diferencias finitas, conocido originalmente como operadores de soporte y posteriormente como métodos miméticos (MIM) (Shashkov and Steinberg, 1995; Hyman and Shashkov, 1998; Hyman et al., 2002; Castillo and Grone, 2003), a mostrado su superioridad ante los esquemas clásicos de diferencias finitas (Freites, 2004; Guevara et al., 2005).

¹Autor para Correspondencia: abdull@ula.ve

Cada uno de estos métodos presenta ventajas para algún tipo de problema y desventajas en otros. A pesar de esto, y sin introducir ningún tipo de sesgo, el MEF ha predominado en casi todas las aplicaciones que resultan de interés científico hoy en día. Y, en aquellas donde el método DF mantuvo su preponderancia, el MEF estándar ha sufrido modificaciones para optimizar su aplicabilidad en estos problemas. Por ejemplo, se puede citar a (Li, 2006; Rivière, 2008) para problemas de dinámica de fluidos y (Cordero and Díez, 2010) en el caso de problemas con conductividad discontinua. Por otro lado, mucho se ha dicho sobre la eficiencia de los métodos miméticos en comparación con el método DF (Arteaga and Guevara, 2008; Guevara, 2005), principalmente en problemas difusivos estacionarios. Sin embargo, se ha dejado de lado su comparación con el MEF, justificando el hecho a una alta complejidad de la implementación computacional del mismo.

En este trabajo, buscando una mejor interpretación de las diferencias que existen entre los tres métodos, se presenta un análisis numérico de las propiedades que posee cada uno de estos métodos: convergencia, precisión en la frontera del dominio, eficiencia en diversos problemas, flexibilidad al dominio físico, implementación y costo computacional. Dicho análisis se enmarca dentro de la ecuación de convección-difusión estacionaria para problemas unidimensionales; se busca facilitar el análisis de los métodos, dejando de lado, momentáneamente, las dificultades analíticas y geométricas que implica un dominio físico 2D.

El resto del artículo se estructura de la siguiente manera. En el siguiente apartado se introduce el problema de valor de frontera usado junto a sus condiciones de frontera (Robin). En el tercer apartado se describen brevemente los métodos numéricos; posteriormente, en la cuarta sección, se realiza la experimentación numérica y la discusión de los resultados. Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas y las referencias del trabajo.

2 PROBLEMA MODELO

La ecuación que modela la transferencia de calor por convección-difusión en régimen estacionario en su forma más simple (problema unidimensional) viene dada por

$$k(x)\frac{d^2}{dx^2}u + \nu(x)\frac{d}{dx}u = f, \quad \text{en } \Omega = (a, b), \quad (1)$$

donde $u(x)$ representa la temperatura (variable del problema) en un punto x del dominio $\Omega = (a, b)$; $k > 0$, el coeficiente de difusión térmica; ν , la velocidad convectiva (o advectiva) y f , una función escalar que describe la existencia de una fuente o sumidero en el problema. La ecuación se completa al definir las condiciones de frontera:

$$\alpha_a u(a) + \beta_a \frac{d}{dx}u(a) = \gamma_a \quad \alpha_b u(b) + \beta_b \frac{d}{dx}u(b) = \gamma_b \quad (2)$$

con $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$, $i = a, b$, parámetros reales conocidos, y dependiendo de su valor se tendrán condiciones de contorno Dirichlet, Neumann o Robin. Aunque la solución general del problema de valor de frontera (1)-(2) se puede obtener en gran parte de las configuraciones del problema mediante métodos analíticos, el mismo resultará apropiado para dejar ver las propiedades de los métodos numéricos en estudio, y simplificar la visualización y análisis de los resultados.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS

En este apartado se describen brevemente los tres métodos utilizados. Una descripción detallada del esquema mimético a ser utilizado en este artículo puede ser vista, entre otras, en (Guevara, 2005). Para el caso del MEF existe un sin número de referencias que introducen el método desde distintas vertientes; aquí, nos inclinamos por (Becker et al., 1981; Šolín, 2006; Calderón and Gallo, 2011). Por último, en el caso de DF se remite al lector a (Strikwerda, 2004).

3.1 Método Mimético

Los métodos miméticos se basan en la discretización de los operadores clásicos de las EDP (divergencia, gradiente y rotacional) de tal forma que ellos satisfagan una versión discreta del Teorema de Stokes o identidad de Green:

$$\langle \mathbf{D}v, f \rangle_Q + \langle v, \mathbf{G}f \rangle_P = \langle \mathbf{B}v, f \rangle_I. \quad (3)$$

Aquí, \mathbf{D} , \mathbf{G} y \mathbf{B} son las versiones discretas de sus continuos correspondientes: gradiente (∇), divergencia ($\nabla \cdot$) y operador de frontera $\partial/\partial n$. Los $\langle \cdot \rangle$ representan un producto interior generalizado con pesos Q , P y I . Usando la identidad (3) se obtiene una relación para el operador de frontera

$$\mathbf{B} = Q\mathbf{D} + \mathbf{G}^t P. \quad (4)$$

Para la discretización, se define una malla cuya geometría está dada por los nodos x_i , con $i = 0, 1, \dots, N$, y las celdas de la misma son los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, \dots, N$. El tamaño de la celda, h , viene dado por $h = 1/N$, suponiendo que la malla está distribuida uniformemente. Los nodos intermedios de las celdas queda dado por $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$, ver Figura 1. La solución y el operador divergencia se definen en el centro de las celdas, mientras el operador gradiente en los nodos x_i que definen las celdas (ver Figura 1).

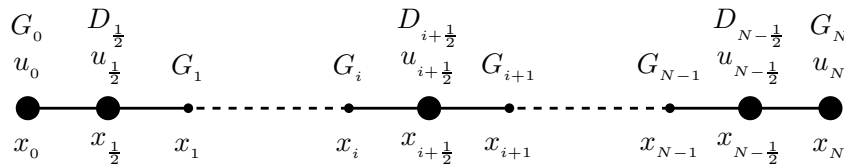


Figura 1: Malla unidimensional mimética.

En este trabajo, se analiza el método mimético que surge de los operadores discretos de segundo orden (tanto en frontera como en los nodos internos) introducidos por (Castillo and Grone, 2003) y dados en (5) y (6).

$$\vec{G}\vec{u} \equiv \begin{bmatrix} (Gu)_0 \\ (Gu)_1 \\ \vdots \\ (Gu)_{N-1} \\ (Gu)_N \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & 3 & -\frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{3} & -3 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}_{N+1 \times N+2} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_{1/2} \\ \vdots \\ u_{N-1/2} \\ u_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\vec{D}\vec{v} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ D_{\frac{1}{2}}v \\ D_{\frac{3}{2}}v \\ \vdots \\ D_{N-\frac{3}{2}}v \\ D_{N-\frac{1}{2}}v \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{N+2 \times N+1} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \\ v_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

En (6) aparecen dos filas de ceros (una en la parte superior y otra en la parte inferior), con esto se busca obtener una matriz cuadrada al componer operadores. El operador de frontera B queda dado explícitamente por

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & -1/8 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1/8 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{N+2 \times N+2}$$

A partir de las discretizaciones de los operadores, la aproximación mimética para la ecuación de convección-difusión (1) queda dada por

$$k\mathbf{D}\mathbf{G}U + \nu\mathbf{G}U = (k\mathbf{D}\mathbf{G} + \nu\mathbf{G})U = F, \quad (7)$$

donde U representa la solución aproximada mimética a la solución exacta, u , del problema

$$U = (U(x_0), U(x_{1/2}), \dots, U(x_{N-1/2}), U(x_N))^t,$$

y F representa la restricción de f a la malla mimética:

$$F = (f(x_0), f(x_{1/2}), \dots, f(x_{N-1/2}), f(x_N))^t.$$

Como el operador divergencia discretizado no actúa sobre la frontera, entonces las condiciones de contorno Robin (2) se obtienen a partir

$$([\alpha] + [\beta](\mathbf{B}\mathbf{G}))U = f_b, \quad (8)$$

donde el vector f_b resulta de restringir el término no homogéneo de las condiciones de contorno a la malla mimética, es decir, $f_b = (\gamma_a, 0, \dots, 0, \gamma_b)^t$. Las matrices $[\alpha]$ y $[\beta]$ son tales que $\alpha_{1,1} = \alpha_a$, $\alpha_{N+2,N+2} = \alpha_b$, $\beta_{1,1} = \beta_a$, $\beta_{N+2,N+2} = \beta_b$, y el resto de entradas son cero.

A partir de (7) y (8), el esquema mimético para la ecuación de convección-difusión (1) sujeto a las condiciones de contorno Robin (2) queda dado por

$$([\alpha] + [\beta](\mathbf{B}\mathbf{G}) + k\mathbf{D}\mathbf{G} + \nu\mathbf{G})U = F + f_b. \quad (9)$$

3.2 Método de Diferencias Finitas

En el método de diferencias finitas los operadores diferenciales presentes en la ecuación diferencial son discretizados (aproximados) para los nodos de la malla, x_i , con $i = 0, 1, \dots, N$, usando esquemas en diferencia que provienen del truncamiento del polinomio de Taylor. Para obtener el mismo orden de convergencia que el esquema mimético (7) planteado en el apartado anterior, se propone un método usando los esquemas de diferencia de segundo orden:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad \frac{d}{dx}u(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

En los nodos interiores de la malla, la discretización realizada a partir del esquema de segundo orden es riguroso. No obstante, al usar el esquema de diferencias centradas de segundo orden para discretizar las condiciones de frontera de Robin (2) se emplean nodos fantasmas, lo cual hace al método poco riguroso en este respecto.

El esquema en diferencias finitas para la ecuación de convección-difusión (1) queda dado entonces

$$\begin{aligned} \left[(k_0 - \nu_0 \frac{h}{2}) \frac{2h\alpha_a}{\beta_a} - 2k_0 \right] U_0 + 2k_0 U_1 &= h^2 f_0 + (k_0 - \nu_0 \frac{h}{2}) \frac{2h}{\beta_a} \gamma_a, \\ (k_i - \nu_i \frac{h}{2}) U_{i-1} - 2k_i U_i + (k_i + \nu_i \frac{h}{2}) U_{i+1} &= h^2 f_i, \quad \text{para } i = 1 : N-1, \\ 2k_N U_{N-1} - \left[(k_N + \nu_N \frac{h}{2}) \frac{2h\alpha_b}{\beta_b} + 2k_N \right] U_N &= h^2 f_N - (k_N + \nu_N \frac{h}{2}) \frac{2h}{\beta_b} \gamma_b, \end{aligned} \quad (10)$$

donde U_i , con $i = 0, 1, \dots, N$, define la solución aproximada del problema. Los subíndices en el esquema denotan la evaluación en los nodos x_i de la malla de diferencias finitas (por ejemplo, $f_i = f(x_i)$).

3.3 Método de los Elementos Finitos

En el MEF se tiene una solución $u_H := \sum a_i \phi_i(x)$, con a_i coeficientes a determinar, y ϕ_i funciones base de un espacio de dimensión finita $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}$, con \mathcal{V} el espacio de funciones admisibles de la forma débil o variacional del problema

$$B(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (11)$$

donde

$$B(u, v) = \theta_a \alpha_a u(a) - \theta_b \alpha_b u(b) - \int_a^b [(kv)' + \nu v] u' dx \quad (12)$$

es una forma bilineal y

$$l(v) = \int_a^b f v dx - \theta_b \gamma_b + \theta_a \gamma_a \quad (13)$$

es un funcional lineal. En (12) y (13), θ_a y θ_b quedan dadas por $\theta_a = k(a)v(a)/\beta_a$ y $\theta_b = k(b)v(b)/\beta_b$, y \mathcal{V} el espacio de Sobolev $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Los coeficientes a_i son determinados a partir del sistema de ecuaciones que surge al sustituir u_H en la forma variacional (11).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En este apartado, se presentan y analizan los resultados numéricos obtenidos (comparativamente) por los métodos propuestos en distintas configuraciones del problemas (1)-(2) en el dominio $\Omega = (0, 1)$. Para el análisis se usan las normas del máximo, $\|\cdot\|_\infty$, y la norma L_2 definidas por

$$\|e\|_\infty := \max \{e_j := |\tilde{u}_j - u_j|\}, \quad \|e\|_{L_2}^2 := \int_{\Omega} |e|^2 d\Omega.$$

En la norma del máximo, \tilde{u}_j representa la solución obtenida por alguno de los tres métodos numéricos y u_j la solución exacta del problema. Para el caso del esquema mimético, $j = i + 1/2$, con $i = 0, \dots, n - 1$; y $j = 1, \dots, n - 1$, para los otros dos métodos numéricos. Para la norma L_2 , se usa la forma continua en lugar de su versión discreta, $\|e\|_{L_2}^2 = h \sum_j |\tilde{u}_j - u_j|^2$, usada por (Batista and Castillo, 2009). Se quiere evitar el sesgo que puede presentar la versión discreta de la norma a favor del esquema mimético o diferencias finitas. Pues, en cada segmento de la malla, la solución de estos métodos es constante, mientras la de elementos finitos, no necesariamente.

Ejemplo 1

Se resuelve (1)-(2) con coeficiente de difusión $k = 1$, velocidad convectiva $\nu = 0$, condiciones de contorno Robin:

$$\alpha u(0) - u'(0) = -20/(e^{20} - 1), \quad \alpha u(1) + u'(1) = 0,$$

con $\alpha := -20e^{20}/(e^{20} - 1)$ y un término fuente, $f(x)$, definido tal que la solución analítica del problema queda dada por $u(x) = (e^{20x} - 1)/(e^{20} - 1)$. La Figura 2 muestra las soluciones aproximadas junto a la solución analítica del problema en una malla uniforme de 20 puntos. La

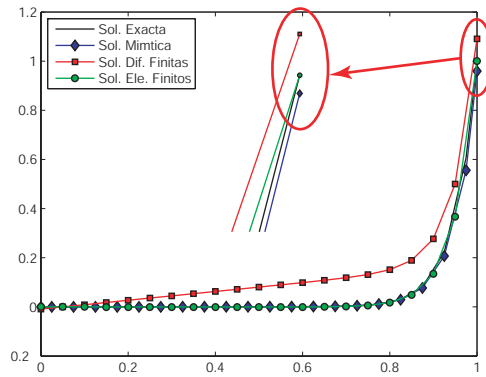


Figura 2: Ejemplo 1: Comparación de las soluciones aproximadas en un malla de 20 nodos. En la frontera, el FEM supera en precisión a los otros dos esquemas.

ampliación en la frontera derecha muestra la mejor precisión del MEF al imponer condiciones de frontera, seguido del esquema mimético que supera a DF, aunque en esta se esté usando esquemas de segundo orden para aproximar la frontera (ver (10)). Esta propiedad de aproximación

se mantiene al aumentar el número de nodos y se repite para cualquier problema con coeficientes k y ν constantes. La igualdad en la precisión de los nodos de frontera es solo alcanzada cuando se tienen condiciones de frontera Dirichlet.

La Figura 3 muestra los errores alcanzados (a la izquierda medidos a partir de la norma del máximo y, a la derecha, usando norma L_2). En la gráfica, las pendientes de las rectas definen el orden de convergencia de los métodos y mientras más abajo se encuentre, mejor será el esquema que represente. Los métodos alcanzan el orden de convergencia teórico en la norma

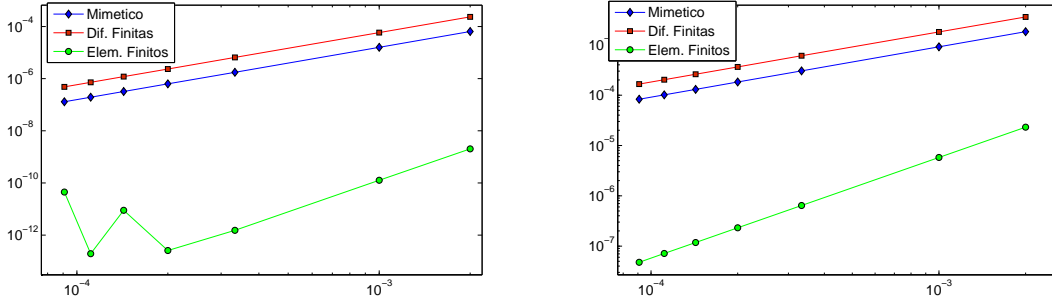


Figura 3: Ejemplo 1: Errores numéricos: en norma del máximo, $\|\cdot\|_\infty$, (izquierda) y norma L_2 (derecha).

N° de Elementos	Norma $\ \cdot\ _\infty$			Norma $\ \cdot\ _{L_2}$		
	DF	MIM	MEF	DF	MIM	MEF
1000	1.999944	2.016795	4.000306	0.986027	1.000097	1.999880
3000	1.999990	2.007299	4.022705	0.994014	1.000020	1.999978
5000	1.999998	2.003188	3.485599	0.997404	1.000004	1.999996
7000	2.000000	2.002136	-10.558	0.998307	1.000002	1.999967
9000	1.999999	2.001412	15.251	0.998740	1.000001	2.000043
11000	1.999998	2.001592	-27.111	0.998995	1.000001	2.000664

Cuadro 1: Ejemplo 1. Orden de convergencia en Norma del Máximo y Norma L_2 .

del máximo (ver Tabla 1). Sin embargo, en norma del máximo, para este problema, el MEF presenta una superconvergencia alcanzando el ε de máquina. Por tal motivo, las oscilaciones que presenta la gráfica para el caso del MEF es debido a errores de redondeo de máquina y no a pérdida de precisión del MEF. Esta característica no se mantiene en otras configuraciones del problema como se verá posteriormente. En norma L_2 , el MEF presenta un orden dos en su convergencia (como era de esperar, ver (Šolín, 2006)), mientras los otros dos métodos presentan un orden uno de convergencia (Figura 3 y Tabla 1).

Ejemplo 2

En este caso, se define el problema modelo (1)-(2) con coeficiente de difusión $k(x) = 1/\alpha + \alpha(x - x_0)^2$, velocidad convectiva $\nu(x) = k'(x)$, con $\alpha = 250$ y $x_0 = 0.75$, condiciones de

contorno Robin:

$$u(0) + u'(0) = \alpha/(1 + \alpha^2 x_0^2), \quad u(1) + u'(1) = -\arctan(\alpha(1 - x_0)) - \arctan(\alpha x_0),$$

y un término fuente, $f(x)$, definido tal que la solución analítica del problema viene dada por $u(x) = (1 - x)[\arctan(\alpha(x - x_0)) + \arctan(\alpha x_0)]$. La Figura 4 (izquierda) muestra las soluciones aproximadas junto a la solución analítica del problema para una malla uniforme de 60 puntos. A la derecha, se ilustra la convergencia asintótica, $h \rightarrow 0$, de las aproximaciones en el nodo de frontera $x = 1$. Cuando la discretización es gruesa (pocos nodos) el método mimético supera levemente al MEF. El método DF necesita superar los 1500 elementos para alcanzar la precisión de los otros dos métodos. Para este ejemplo, se puede ver que, $u(0) = u(1) = 0$, lo

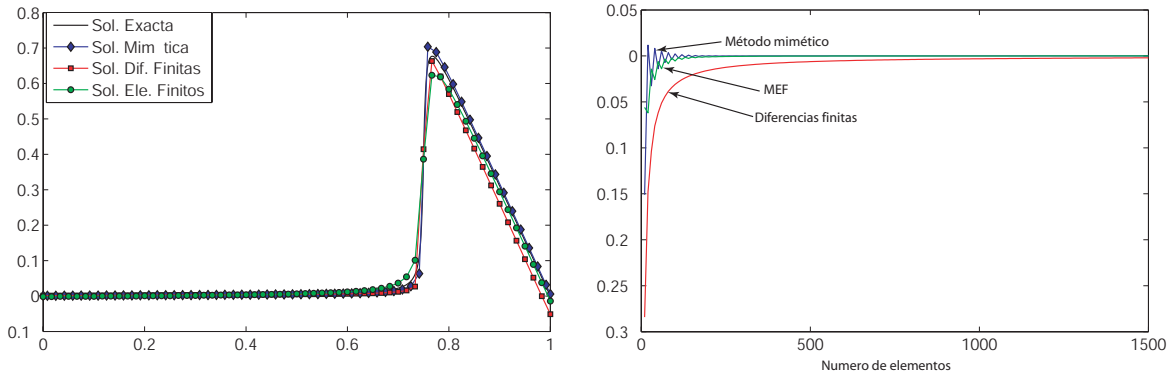


Figura 4: Ejemplo 2: Soluciones aproximadas y exacta en un malla de 60 nodos (izquierda). Convergencia de los métodos en el nodo de frontera $x = 1$ a medida que se aumenta el número de nodos en la malla.

cual simplifica las condiciones de frontera y, por lo tanto, la formulación variacional del problema (ver, ecuaciones (12)-(13)). En estos casos, la mejor precisión en los nodos de frontera es lograda por el MEF.

La Figura 5 y Tabla 2 muestra los errores y el orden de convergencia alcanzado. En norma del

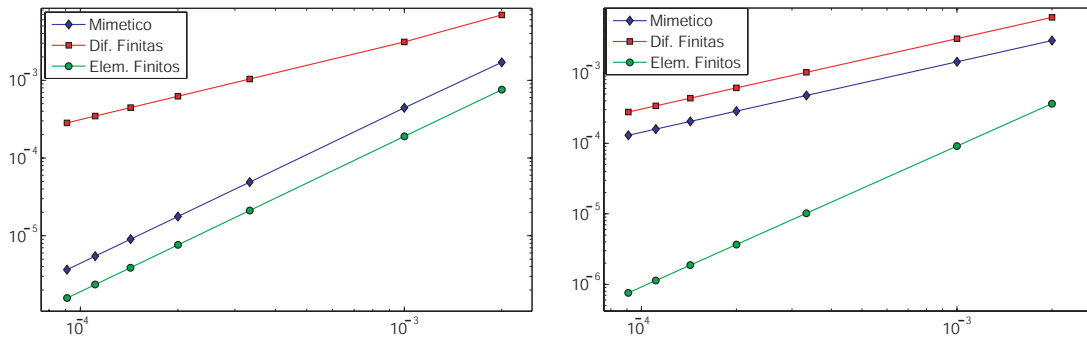


Figura 5: Ejemplo 2: Errores numéricos: en norma del máximo, $\| \cdot \|_\infty$, (izquierda) y norma L_2 (derecha).

máximo, el método DF pierde el orden 2 de convergencia de los esquemas usados para su construcción. Este fenómeno es debido a que los coeficientes de difusión y convectivo dependen de

la variable espacial (no constantes). El MIM y MEF mantienen el orden 2 de convergencia con MEF, superando ligeramente en precisión a MIM. En norma L_2 , se repite el comportamiento del ejemplo anterior: orden dos para MEF y orden uno para DF y MIM.

N° de Elementos	Norma $\ \cdot\ _\infty$			Norma $\ \cdot\ _{L_2}$		
	DF	MIM	MEF	DF	MIM	MEF
1000	1.154080	1.942273	1.993329	1.004321	1.003528	1.996938
3000	1.000175	2.004354	1.998233	0.998419	1.000636	1.998873
5000	1.000073	1.994971	1.999533	0.998652	1.000109	1.999803
7000	1.000047	2.000917	1.999993	0.999021	1.000045	1.999919
9000	1.000035	2.000485	1.999783	0.999236	1.000025	1.999950
11000	1.000028	1.998615	2.000046	0.999375	1.000016	1.999978

Cuadro 2: Ejemplo 2. Orden de convergencia en Norma del Máximo y Norma L_2 .

Ejemplo 3

Se resuelve el problema modelo (1)-(2) para un coeficiente de difusión constante $k = 1.052$, velocidad convectiva $\nu = -110.5$, y un término fuente $f \equiv 0$. La solución analítica queda dada por $u(x) = (1 - e^{-\lambda x})/(1 - e^{-\lambda})$, con $\lambda = \nu/k$. En la experimentación numérica se toman inicialmente condiciones de contorno Dirichlet: $u(0) = 0$, $u(1) = 1$; y, posteriormente, condiciones Robin:

$$u'(0) = \lambda/(1 - e^{-\lambda}), \quad u(1) + u'(1) = 1 + \lambda e^{-\lambda}/(1 - e^{-\lambda})$$

Para esta configuración del problema junto a condiciones de contorno Dirichlet, es altamente conocido y fácil de probar, los métodos DF y MEF resultan equivalentes y presentan oscilaciones cuando el número local de Péclet $|\nu|h/(2k) \gg 1$. La forma más simple de superar este fenómeno oscilatorio (físicamente no correcto) es hacer h suficientemente pequeño o añadiendo un término de difusividad artificial al problema. Debe quedar claro, que en los casos en que el número local de Péclet es igual o mucho menor que 1 estos métodos no presentan oscilaciones, contrario a lo que erróneamente se afirma en (Batista and Castillo, 2009). La Figura 6 muestra las soluciones obtenidas para 50, 80 y 200 elementos en la malla. Resulta evidente que la solución del esquema mimético también presenta las oscilaciones, y para este caso necesita más nodos que DF y MEF para evitar las oscilaciones y lograr la convergencia a la solución analítica.

La Figura 7 y Tabla 3 muestran los errores y el orden de convergencia alcanzado para el caso de condiciones de contorno Dirichlet. En norma del máximo, como ya se dijo antes, los métodos DF y MEF resultan equivalentes, y mantienen el orden 2 de convergencia. Sin embargo, el esquema MIM pierde su orden 2 de convergencia y su precisión es más pobre que la lograda por los otros dos métodos. En norma L_2 , el método DF se une a MIM logrando solo un orden uno en su convergencia, y con un error exiguo entre los dos. En esta norma, el MEF mantiene el orden dos de convergencia y nuevamente resulta superior en su precisión.

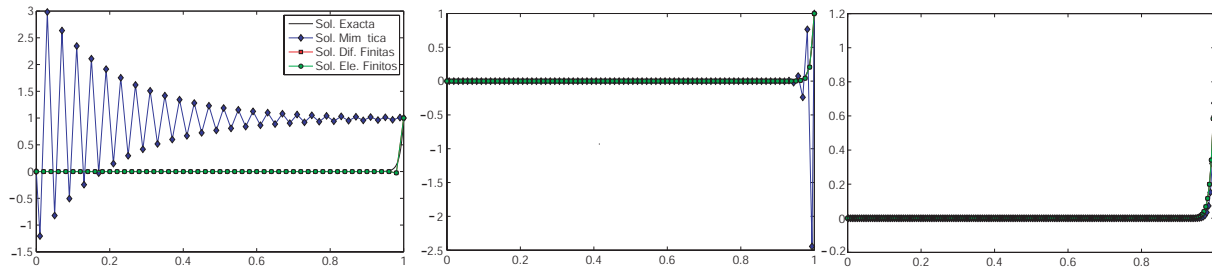


Figura 6: Ejemplo 3: Soluciones aproximadas y exacta para 50 (izquierda), 80 (centro) y 200 (derecha) elementos.

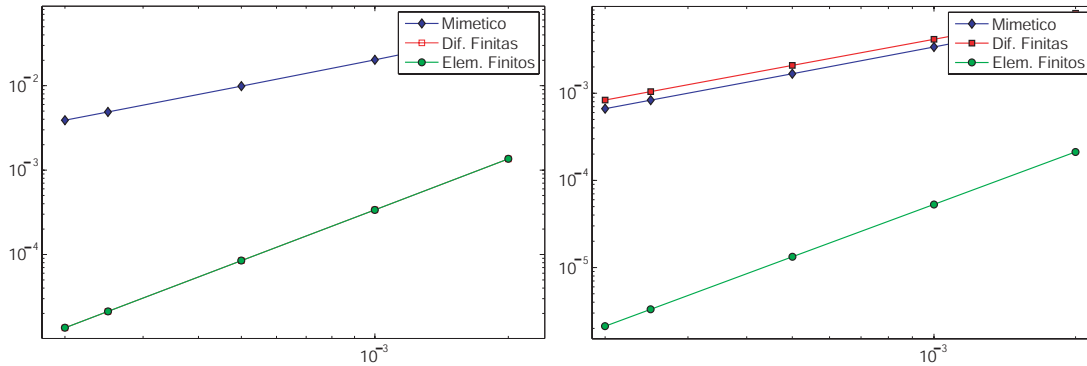


Figura 7: Ejemplo 3: Errores numéricos: en norma del máximo, $\| \cdot \|_{\infty}$, (izquierda) y norma L_2 (derecha).

N^o de Elementos	Norma $\ \cdot \ _{\infty}$			Norma $\ \cdot \ _{L_2}$		
	DF	MIM	MEF	DF	MIM	MEF
1000	2.005097	1.078854	2.005097	0.990024	1.042730	1.998561
2000	1.999493	1.034747	1.999493	0.995134	1.018963	1.999640
4000	2.000324	1.016534	2.000324	0.997599	1.008977	1.999910
5000	2.000267	1.009977	2.000267	0.998517	1.005461	1.999966

Cuadro 3: Ejemplo 3. Orden de convergencia en Norma del Máximo y Norma L_2 .

Para las condiciones de contorno Robin, las soluciones aproximadas son mostradas en la Figura 8. En la frontera $x = 1$ la precisión es pobre para los métodos DF y MIM (parte ampliada al centro de cada gráfica de la Figura 8). El esquema MIM llega a necesita hasta 4 mil elementos para alcanzar la precisión que logra MEF con solo 80 elementos. EL método DF pierde precisión en esta frontera y no converge.

Los resultados de convergencia para MEF y MIM resultan equivalentes a los alcanzados para el caso de condiciones de contorno Dirichlet (orden 2 para MEF y orden 1 para MIM). Sin embargo, diferencia finitas pierde por completo su convergencia, debido a la pérdida de precisión que presenta alrededor de la frontera $x = 1$. Por último, se debe señalar que la matriz que define el sistema resultante para MEF y MIM presenta un número de condición superior a 10^{-19} .

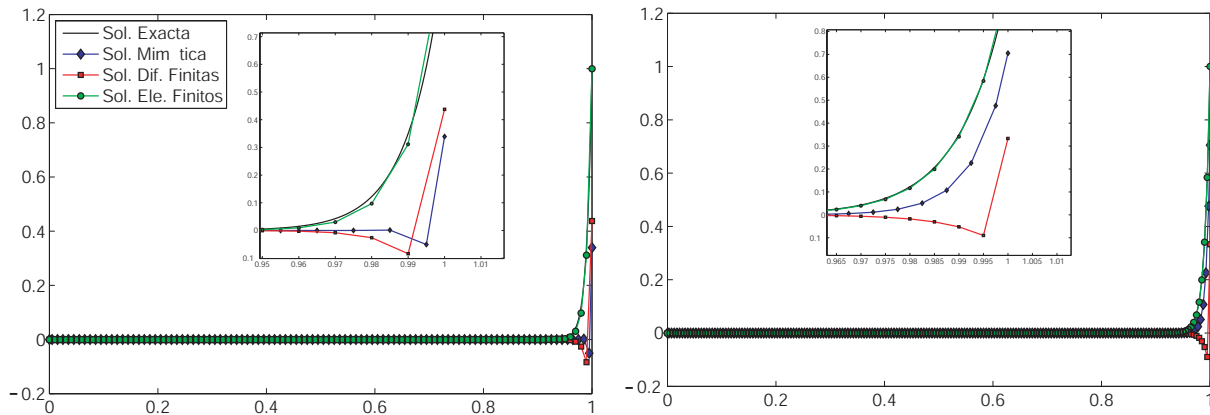


Figura 8: Ejemplo 3: Soluciones aproximadas y exacta para 100 (izquierda) y 200 (derecha) elementos. La parte ampliada en cada gráfica representa el comportamiento numérico alrededor de la frontera $x = 1$.

5 CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

Resulta claro, que el MEF presenta mejores resultados en precisión y convergencia que los otros dos métodos. Al mismo tiempo, MIM resulta en todo momento superior al método DF (como ya ha sido reportado por muchas referencias). En el caso del Ejemplo 3, donde se podría esperar superioridad del MIM, debido a su condición conservativa, tampoco logra superar a MEF. Sin querer entrar en discusión de las modificaciones apropiadas o métodos óptimos para la resolución del Ejemplo 3, queda abierta la pregunta de qué condiciones o cambios se deben imponer al MIM para problemas altamente convectivos.

En gran medida, se ha justificado el uso de MIM ante MEF debido a la complejidad teórica de MEF (para aquellos no matemáticos). Sin embargo, la definición de los operadores discretos usados por MIM (principalmente en el caso 2D o 3D) puede resultar tan complejo en cálculo que pueden competir fácilmente con la necesidad teórica de MEF. Tal dificultad se acrecienta, si se quiere subir el orden de convergencia del método, hecho que se logra en MEF con gran facilidad. Además, hay que añadir la obligatoriedad que existe de una eficiente implementación computacional, pues el uso de matrices para definir operadores y condiciones de contorno puede resultar en un rápido desbordamiento de memoria en el método MIM. Por último, y tal vez lo más importante, se debe mencionar el alto grado de complejidad y dificultad que presenta MIM para trabajar en mallas que se ajusten a dominios arbitrarios o en elementos deformados (Hyman and Shashkov, 1997, 1998).

Como conclusión, si se quiere abordar un problema con un método novel y se tiene a mano la discretización de los operadores, el método mimético, MIM, resultará una buena elección, por arriba de cualquier esquema de diferencias finitas. Desde la vertiente matemática, sobresale el interés de afianzar las bases teóricas del método MIM y proponer mejoras en las líneas donde el mismo aún sigue sin rigor o no han sido abordadas.

REFERENCIAS

Arteaga J. and Guevara J. A conservative finite difference scheme for static diffusion equation. *Divulgaciones Matemáticas*, 16(1):39–54, 2008.

- Batista E. and Castillo J. Mimetic schemes on non-uniform structured meshes. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 34(1):152–162, 2009.
- Becker E.B., Carey G.F., and Oden J.T. *Finite Elements: An Introduction*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey 07632, 1981.
- Calderón G. and Gallo R. *Introducción al Método de los Elementos Finitos: un Enfoque Matemático*. IVIC, Caracas, Venezuela, 2011.
- Castillo J. and Grone R.D. A matrix analysis approach to higher-order approximations for divergence and gradients satisfying a global conservation law. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 25(1):128–142, 2003.
- Cordero F. and Díez P. XFEM+: una modificación de XFEM para mejorar la precisión de los flujos locales en problemas de difusión con conductividades muy distintas. *Revista Internacional Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 26(2):121–133, 2010.
- Freites M. Un estudio comparativo de los métodos miméticos para la ecuación estacionaria de difusión, 2004. Tesis de grado, Facultad de Ciencias, UCV.
- Guevara J., Freites M., and Castillo J. A new second order finite difference conservative scheme. *Divulgaciones Matemáticas*, 13(1):107–122, 2005.
- Guevara J.M. Sobre los esquemas miméticos de diferencias finitas para la ecuación estática de difusión. Trabajo de ascenso, Facultad de Ciencias, UCV, Caracas, Venezuela, 2005.
- Hyman J.M. and Shashkov M. Natural discretizations for the divergence, gradient, and curl on logically rectangular grids. *Computers Math. Applic.*, 33(4):81–104, 1997.
- Hyman J.M. and Shashkov M. The approximation of boundary conditions for mimetic finite difference methods. *Computers Math. Applic.*, 36(5):79–99, 1998.
- Hyman J.M., Shashkov M., and Steinberg S. Mimetic finite difference methods for diffusion equations. *Computers Math. Applic.*, 6(3-4):333–352, 2002.
- Li B.Q. *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*. Springer-Verlag, London, fifth edition, 2006.
- Rivière B. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: Theory and Implementation*. SIAM, Philadelphia, fifth edition, 2008.
- Shashkov M. and Steinberg S. Support-operator finite-difference algorithms for general elliptic problems. *Journal of Computational Physics*, 118(1):131–151, 1995.
- Strikwerda J.C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM, Ltd., Philadelphia, second edition, 2004.
- Šolín P. *Partial Differential Equations and Finite Element Method*. John Wiley & Sons, Ltd., New Jersey, fifth edition, 2006.